KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

2. ÅRSPRØVE 2011 S-2 DM ex ret

SKRIFTLIG EKSAMEN I DYNAMISKE MODELLER

Mandag den 6. juni 2011

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^3x}{dt^3} + 10\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^3x}{dt^3} + 10\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 4x = e^{-t}.$$

(1) Vis, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = (z^2 + 3z + 2)(z^2 + 2z + 2),$$

og bestem dernæst alle rødderne i polynomiet P.

Løsning. Ved simpel udgangning får vi, at

$$\forall z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4 = (z^2 + 3z + 2)(z^2 + 2z + 2).$$

Rødderne i polynomiet P er rødderne i polynomierne $Q_1(z) = z^2+3z+2$ og $Q_2(z) = z^2 + 2z + 2$.

Vi finder, at

$$z^2 + 3z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow z = -2 \vee z = -1,$$

og at

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} \Leftrightarrow z = -1 + i \vee z = -1 - i.$$

Polynomiet P har derfor rødderne $-1, -2, -1 + i$ og $-1 - i$.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$, og godtgør, at $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. På grundlag af resultatet i det foregående spørgsmål ser vi, at differentialligningen $(*)$ har den fuldstændige løsning

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-t}\cos(t) + c_4 s^{-t}\sin(t),$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

Da alle de karakteristiske rødder, altså rødderne i polynomiet P har negativ realdel, er diffrentialligningen $(*)$ globalt asymptotisk stabil.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Da funktionen $g(t) = e^{-t}$ er en løsning til differentialligningen $(*)$ gætter vi på en speciel løsning til $(**)$ af formen $f(t) = Ate^{-t}$, og vi får så, at

$$\frac{df}{dt} = A(1-t)e^{-t},\ \frac{d^2f}{dt^2} = A(t-2)e^{-t},\ \frac{d^3f}{dt^3} = A(3-t)e^{-t}$$

og

$$\frac{d^4f}{dt^4} = A(t-4)e^{-t}.$$

Ved indsættelse i differentialligningen $(**)$ ser vi, at $A = 1$.

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$ er derfor

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-t}\cos(t) + c_4 s^{-t}\sin(t) + te^{-t},$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

(4) Løs differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Løsning. På baggrund af resultatet i spørgsmål 1 finder vi, at differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = 0$$

har den fuldstændige løsning

$$y = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t},$$

hvor $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

(5) Lad $a > 0$. Løs differentialligningen

$$(\S) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + (\ln(a))\frac{dy}{dt} + y = 0$$

for et vilkårligt $a > 0$.

Løsning. Det karakteristiske polynomium P_a for differentialligning (§) er givet ved

$$\forall z \in \mathbf{C} : P_a(z) = z^2 + (\ln(a))z + 1.$$

De karakteristiske rødder er derfor givet ved udtrykket

$$z = \frac{-(\ln(a))\pm\sqrt{(\ln(a))^2 - 4}}{2}.$$

Vi ser først på det tilfælde, hvor diskriminanten $d = (\ln(a))^2 - 4 > 0$. Dette er ensbetydende med, at

$$\ln(a) < -2 \vee \ln a > 0 \Leftrightarrow 0 < a < e^{-2} \vee a > e^2.$$

I dette tilfælde har differentialligningen (§) den fuldstændige løsning $x =$

$$k_1 \exp\Big(\frac{-(\ln(a)) + \sqrt{(\ln(a))^2 - 4}}{2}\Big) + k_2 \exp\Big(\frac{-(\ln(a)) + \sqrt{(\ln(a))^2 - 4}}{2}\Big),$$

hvor $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

Så ser vi på det tilfælde, hvor diskriminanten $d = (\ln(a))^2 - 4 = 0$. Dette indtræffer, netop når $a = e^{-2}$, og når $a = e^2$. heraf får vi, at den karakteristiske dobbetrod er enten $z = 1$ eller $z = -1$. Den fuldstændige løsning er derfor enten

$$x = k_1 e^t + k_2 t e^t \ \text{ eller } \ x = k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t},$$

hvor $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

Vi mangler nu blot at se på det tilfælde, hvor diskriminanten $d = (\ln(a))^2 - 4 < 0$. Dette er ensbetydende med, at $e^{-2} < a < e^2$. Den fuldstændige løsning er da

$$x = \exp\Big(-\frac{\ln(a)}{2}t\Big)\Big[k_1 \cos\Big(\frac{\sqrt{4 - (\ln(a))^2}}{2}t\Big) + k_2 \sin\Big(\frac{\sqrt{(4 - \ln(a))^2}}{2}t\Big)\Big],$$

hvor $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter differentialligningssystemerne

$$(\$) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - 5y \end{cases}$$

og

$$(\$\$) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + y + 3 \\ \frac{dy}{dt} = x - 5y - 9 \end{cases} .$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet (\$), og begrund, at dette system er globalt asymptotisk stabilt.

Løsning. Den til differentialligningssystemet (\$) hørende matrix er

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ for denne matrix er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P(t) = \det(A - tE) = (-5 - t)^2 - 1,$$

så de karakteristiske rødder (og dermed egenværdierne for matricen A) er $t_1 = -6$ og $t_2 = -4$.

Vi finder nu de tilhørende egenrum:

$$V(-6) = N(A - (-6)E) = N(A + 6E) = \text{span}\{(-1, 1)\}$$

og

$$V(-4) = N(A - (-4)E) = N(A + 4E) = \text{span}\{(1, 1)\}.$$

Den fuldstændige løsning til (\$) er da

$$\mathbf{z} = c_1 e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x = -c_1 e^{-6t} + c_2 e^{-4t} \,\wedge\, y = c_1 e^{-6t} + c_2 e^{-4t},$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Da $x = x(t) \to 0$ og $y = y(t) \to 0$ for $t \to \infty$ er differentialligningssystemet (\$) globalt asymptotisk stabilt.

(2) Bestem den specielle løsning $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ til (\$), således at betingelsen $(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (1, 7)$ er opfyldt.

Løsning. Betingelsen $(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (1, 7)$ giver os, at $-c_1 + c_2 = 1$ og $c_1 + c_2 = 7$, så $c_1 = 4$ og $c_2 = 3$. Heraf får vi så, at

$$x = -4e^{-6t} + 3e^{-4t} \wedge y = 4e^{-6t} + 3e^{-4t}.$$

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet (\$\$).

Løsning. Da $\det(A) = 24$ er matricen A regulær, og vi finder, at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/24 & -1/24 \\ -1/24 & -5/24 \end{pmatrix}.$$

En konstant løsning $\mathbf{k}$ til det inhomogene differentialligningssystem (\$\$) er da

$$\mathbf{k} = -A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -7/4 \end{pmatrix}.$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet (\$\$) er derfor

$$x = -c_1 e^{-6t} + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{4} \wedge y = c_1 e^{-6t} + c_2 e^{-4t} - \frac{7}{4},$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Opgave 3. Vi betragter vektorfunktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ givet ved

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y^2, e^{xy}).$$

Desuden betragter vi mængden

$$A = \{(u, v) \in \mathbf{R} \mid u > 0 \wedge -1 < v < 2\}.$$

(1) Bestem Jacobimatricen (funktionalmatricen) $D\mathbf{f}(x, y)$ for vektorfunktionen $\mathbf{f}$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi får, at

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}.$$

(2) Bestem determinanten $\det D\mathbf{f}(x,y)$ for Jacobimatricen $D\mathbf{f}(x,y)$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Bestem dernæst mængden

$$L = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid D\mathbf{f}(x,y) \text{ er regulær}\},$$

og vis, at L er åben.

Løsning. Vi ser straks, at $\det D\mathbf{f}(x,y) = 2x^2e^{xy} - 2y^2e^{xy}$, så

$$\det D\mathbf{f}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = x \vee y = -x.$$

Heraf får vi, at

$$L = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid D\mathbf{f}(x,y) \text{ er regulær}\} =$$

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x \vee y = -x\}.$$

Da mængden $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x \vee y = -x\}$, som består af to rette linjer, er afsluttet, er mængden L åben.'

(3) Vis, at mængden A er åben og konveks.

Løsning. Mængden A er fællesmængden af de tre åbne og konvekse halvplaner

$$H_1 = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid u > 0\},\ H_2 = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid v > -1\}$$

og

$$H_3 = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid v < 2\},$$

så derfor er A åben og konveks.

(4) Vis, at mængden

$$P = \mathbf{f}^{-1}(A) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \mathbf{f}(x,y) \in A\}$$

åben. Mængden P er originalmængden for vektorfunktionen $\mathbf{f}$ til mængden A.

Løsning. Vi ved, at mængden A er åben, og da vektorfunktionen $\mathbf{f}$ er kontinuert, er originalmængden P åben.

Opgave 4. Vi betragter korrespondancerne $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ og $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{for } x < 0 \\ [-1,2], & \text{for } x = 0 \\ [-1,0], & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

og

$$G(y) = \begin{cases} [y,0], & \text{for } y < 0 \\ ]0,1], & \text{for } y = 0 \\ [0,1], & \text{for } y > 0 \end{cases}.$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet grafegenskaben.

Løsning. Trivielt, da grafen for F er afsluttet.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

Løsning. Lad os betragte følgen $(\frac{1}{k})$, som er konvergent med grænseværdien 0. Lad os desuden betregte tallet $y = 2$. Der findes da ingen konvergent følge (y_k), som opfylder betingelsen $y_k \in F(\frac{1}{k}) = [-1,0]$, og som har grænseværdien 2. Heraf følger påstanden.

(3) Vis, at korrespondancen F er opad hemikontinuert.

Løsning. Da korrespondancen F har afsluttet grafegenskaben, og da alle mængerne $F(x) \subseteq [-1,2]$, der er et kompakt interval, er F opad hemikontinuert.

(4) Vis, at korrespondancen G ikke er nedad hemikontinuert.

Løsning. Vi betragter følgen $(-\frac{1}{k})$, der er konvergent med 0 som grænsepunkt. Lad os endvidere betragte tallet $1 \in G(0)$. Der findes ikke nogen konvergent følge (z_k), så $z_k \in G(-\frac{1}{k})$, og som har 1 som grænsepunkt. Heraf følger påstanden.

(5) Bestem er forskrift for den sammensatte korrespondance $G \circ F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Løsning. Vi finder, at

$$G \circ F(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y) = \begin{cases}]0,1] \cup [0,1] = [0,1], & \text{for } x > 0 \\ [-1,2], & \text{for } x = 0 \\ [-1,1], & \text{for } x > 0 \end{cases}.$$